

2020

STATISTICS

सांख्यिकी

PAPER—I

पत्र—I

Time Allowed : 1½ hours

Maximum Marks : 75

समय : 1½ घण्टे

पूर्णांक : 75

Instructions :

- The figures in the margin indicate full marks.
- Answer **any ten** questions.
- Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.
- All questions have been printed both in Hindi and English. In case of any ambiguity in Hindi version, the English version shall be considered authentic.
- Parts of the same question must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

अनुदेश :

- उपान्त के अंक पूर्णांक के द्योतक हैं।
- किन्हीं दस प्रश्नों के उत्तर दें।
- परीक्षार्थी यथासम्भव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
- सभी प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों भाषा में छपे हैं। यदि हिन्दी भाषा में कोई संदेह है, तो अंग्रेजी भाषा को ही प्रामाणिक माना जाएगा।
- एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जाएँ तथा उनके बीच में अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जाएँ।

1. If $\{X_n\}$ be a sequence of random variables with $\{F_n\}$ as the sequence of distribution functions and if there exists a random variable X with distribution function F , then prove that F is continuous for any value of X . 7½

यदि $\{F_n\}$ के बंटन फलन क्रम के साथ $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक क्रम है और यदि बंटन फलन F के साथ एक यादृच्छिक चर X भी हो, तो सिद्ध कीजिए कि X के किसी भी मान के लिए F एक सतत फलन है।

2. Define mean-square convergence. Let $\{X_n\}$ be a sequence of random variables and X be another random variable. Prove that

$$[X_n \xrightarrow{L_r} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{L_s} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{P} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{L_r} X]$$

if r th- and s th-order moments of X exist ($r \geq s$). 7½

माध्य-वर्ग अभिसरण को परिभाषित कीजिए। यदि $\{X_n\}$ यादृच्छिक चरों का एक क्रम है और X एक अन्य यादृच्छिक चर है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$[X_n \xrightarrow{L_r} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{L_s} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{P} X] \Rightarrow [X_n \xrightarrow{L_r} X]$$

यदि X के r वाँ व s वाँ आघूर्ण ($r \geq s$) स्थापित हो।

3. If X_1, X_2, \dots , are independently and identically distributed random variables with common mean μ and finite fourth-order moment, then for $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, prove that

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu \right] = 1 \quad 7½$$

यदि सामान्य माध्य μ व सीमित रूप के चतुर्थ आघूर्ण के साथ X_1, X_2, \dots , स्वतंत्र व समरूप बंटित यादृच्छिक चर हों, तब

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right] = 1$$

4. Prove that Poisson distribution is a limiting case of negative binomial distribution. 7½

सिद्ध कीजिए कि प्वासों बंटन, ऋणात्मक द्विपद बंटन का एक सीमान्त स्वरूप है।

5. Let T_1 and T_2 be two unbiased estimators of $g(\theta)$ having same variance. Show that their correlation coefficient ρ cannot be smaller than $(2e_\theta - 1)$, where e_θ is the efficiency of each estimator with respect to an MVUE of $g(\theta)$ as T . 7½

माना समान प्रसरण के $g(\theta)$ के प्रति T_1 व T_2 दो अनभिन्नत आकलक हैं। सिद्ध कीजिए कि इनका सहसम्बन्ध गुणांक ρ का मान $(2e_\theta - 1)$ से छोटा नहीं हो सकता, जबकि e_θ प्रत्येक आकलक की $g(\theta)$ के MVUE आकलक T के सापेक्ष दक्षता है।

6. (a) If X be a random variable from exponential distribution $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, then prove that the distribution of X is complete. 3½

(b) If a random sample is drawn from normal distribution $N(\mu, \theta)$, θ is known, then prove that the sufficient estimator of μ is a function of maximum likelihood estimator (MLE) of μ . 4

(क) यदि X , वक्रिय बंटन $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$, का एक यादृच्छिक चर है, तो सिद्ध कीजिए कि X का बंटन सम्पूर्ण है।

(ख) यदि प्रसामान्य बंटन $N(\mu, \theta)$, θ ज्ञात है, से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि μ का पर्याप्त आकलक, μ के अधिकतम सम्भावित आकलक (MLE) का फलन है।

7. For a random sample of size n , drawn from a population

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

find the most powerful test for testing $H_0: \theta = \theta_0$ against $H_1: \theta = \theta_1$ ($> \theta_0$). 7½

समष्टि

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

से प्राप्त n आमाप के यादृच्छिक प्रतिदर्श के लिए $H_0: \theta = \theta_0$ विरुद्ध $H_1: \theta = \theta_1$ ($> \theta_0$) की जाँच के लिए अधिक बली परीक्षण ज्ञात कीजिए।

8. If X_1, X_2, \dots, X_n be a sequence of random variables with density function $f(x, \theta)$, then for sequential probability ratio test (SPRT) with stopping bounds A and $B (< A)$ and strength (α, β) , prove that

$$A \leq \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad \text{and} \quad A+B \leq \alpha+\beta$$

for testing $H_0: \theta = \theta_0$ against $H_1: \theta = \theta_1$. 7½

यदि X_1, X_2, \dots, X_n घनत्व फलन $f(x, \theta)$ के यादृच्छिक चरों का एक क्रम हो, तब रुकावट सीमाएँ A और $B (< A)$ तथा (α, β) को दृढ़ता के क्रमबद्ध प्रायिकता अनुपात परीक्षण (SPRT) से $H_0: \theta = \theta_0$ विरुद्ध $H_1: \theta = \theta_1$ का परीक्षण करने हेतु सिद्ध कीजिए कि

$$A \leq \frac{1-\beta}{\alpha}, \quad B \geq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad \text{तथा} \quad A+B \leq \alpha+\beta$$

9. If $\underline{X} \sim N_4(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, where

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

then find the distribution of

$$Q = \frac{1}{19} [X_1^2 + 4X_2^2 + X_4^2 + 4X_1X_2 - 4X_2X_4 - 2X_1X_4]$$

7½

यदि $\underline{X} \sim N_4(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, जहाँ

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{तथा} \quad \underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

तो

$$Q = \frac{1}{19} [X_1^2 + 4X_2^2 + X_4^2 + 4X_1X_2 - 4X_2X_4 - 2X_1X_4]$$

का बंटन ज्ञात कीजिए।

10. Explain any one of the following : 7½

- (a) Principal component method
- (b) Cluster analysis

निम्नलिखित में से किसी एक की व्याख्या कीजिए :

- (क) प्रमुख घटक विधि
- (ख) समूह विश्लेषण

11. A sample of n units is selected from a population of N units with inclusion probabilities π_i and π_{ij} . Show that

$$\sum_{j(\neq i)=1}^N \pi_{ij} = (n-1) \pi_i \quad 7\frac{1}{2}$$

π_i और π_{ij} की समावेशित प्रायिकता वाले N पदों के एक समष्टि से n पदों का एक प्रतिदर्श चयनित किया गया है। सिद्ध कीजिए

$$\sum_{j(\neq i)=1}^N \pi_{ij} = (n-1) \pi_i$$

12. Define Horvitz-Thompson estimator for population total and discuss its estimator of variance given by Horvitz-Thompson. Mention the merits and demerits of Horvitz-Thompson estimator. 7½

समष्टि योग के लिए हॉर्विट्ज-थॉम्पसन आकलक को परिभाषित कीजिए तथा हॉर्विट्ज-थॉम्पसन द्वारा दिए गए इसके प्रसरण के आकलक की विवेचना कीजिए। हॉर्विट्ज-थॉम्पसन आकलक के गुण व दोष को बताइए।

13. What is systematic sampling? Where is it useful? Derive its comparison with simple random sampling without replacement in the presence of linear trend. $7\frac{1}{2}$

क्रमबद्ध प्रतिचयन क्या है? इसकी उपयोगिता कहाँ होती है? रेखीय प्रवृत्ति की उपस्थिति में विस्थापन-रहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन से इसकी तुलना कीजिए।

14. Explain the concept of auxiliary variable. Discuss the rationale behind the use of ratio estimator. Obtain large sample expression for its variance and find the condition for it to be better than simple random sampling without replacement. $7\frac{1}{2}$

सहायक चर की संकल्पना को समझाइए। आनुपातिक आकलक से उपयोग के मौलिक तर्क की विवेचना कीजिए। इसके प्रसरण के लिए दीर्घ प्रतिदर्श का समीकरण प्राप्त कीजिए और विस्थापन-रहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की तुलना में इसके अच्छे होने की परिस्थिति ज्ञात कीजिए।

15. Define balanced incomplete block design (BIBD). Give the complete analysis of BIBD without recovery of interblock information. $7\frac{1}{2}$

संतुलित अपूर्ण खण्डक अभिकल्पना (BIBD) को परिभाषित कीजिए। अन्तःखण्डक सूचना प्राप्ति के अभाव में BIBD का पूर्ण विश्लेषण दीजिए।

★ ★ ★