

Statistics

Time : 3 Hours]

[Full Marks : 300

Section—I

खण्ड—I

1. Answer the following questions :

10×5=50

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) Suppose the events A_1, A_2, \dots, A_n are independent and that

$$P(A_i) = \frac{1}{i+1}$$

for $1 \leq i \leq n$. Find the probability that none of the n events occur.

माना कि घटनाएँ A_1, A_2, \dots, A_n स्वतंत्र हैं और

$$P(A_i) = \frac{1}{i+1}$$

जहाँ $1 \leq i \leq n$. कोई भी n घटना के घटित न होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(b) If X is a Poisson variate with parameter m , then show that a standard Poisson variate tends to standard normal variate as $m \rightarrow \infty$. Find the m.g.f. of this variable.

यदि X प्राचल m सहित एक प्वासों चर है, तो दर्शाइए कि $m \rightarrow \infty$ होने पर एक मानक प्वासों चर मानक प्रसामान्य चर की ओर प्रवृत्त होता है। इस चर का आघूर्णजनक फलन ज्ञात कीजिए।

(c) If X_1, X_2, \dots, X_n is a random sample of size n from $N(\mu, \sigma^2)$, where μ is known and if

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

examine if T is unbiased for σ . If not, obtain an unbiased estimator of σ .

यदि $X_1, X_2, \dots, X_n, N(\mu, \sigma^2)$, जहाँ μ ज्ञात है, से लिया गया एक आकार n का यादृच्छिक प्रतिदर्श है और यदि

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \mu|$$

है, तो जाँच कीजिए कि क्या T, σ के लिए अनभिन्न है। यदि नहीं, तो σ का अनभिन्न आकलक प्राप्त कीजिए।

- (d) Describe Kolmogorov-Smirnov one-sample test of goodness of fit and compare it with that of chi-square test.

आसंजन सुष्ठुता के लिए कोलमोगोरोव-स्मिरनोव एकल-प्रतिदर्श परीक्षण का वर्णन कीजिए और इसकी तुलना काई-वर्ग परीक्षण से कीजिए।

- (e) Let $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)' \sim N_3(\mu, I)$ with $\mu = (1 \ 2 \ 3)'$.

Then obtain the distributions of—

(i) $3X_1 - 2X_2 + 5X_3$

(ii) $\begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$

माना $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)' \sim N_3(\mu, I)$, जहाँ $\mu = (1 \ 2 \ 3)'$ है, तो

(i) $3X_1 - 2X_2 + 5X_3$

(ii) $\begin{pmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$

के बंटन प्राप्त कीजिए।

2. (a) In a test, an examinee either guesses or copies or knows the answer to a multiple-choice question with four choices. The probability that he makes a guess is $1/3$ and the probability that he copies the answer is $1/6$. The probability that his answer is correct, given that he copied it is $1/8$. Find the probability that he knew the answer to the question, given that he correctly answered it.

10

किसी परीक्षा में, चार विकल्पों के साथ बहुविकल्पीय प्रश्न के उत्तर का परीक्षार्थी या तो अनुमान लगाता है, या नकल करता है या उत्तर जानता है। उसके अनुमान लगाने की प्रायिकता $1/3$ है और उत्तर को नकल करने की प्रायिकता $1/6$ है। दिया है कि उसने नकल की है, उसका उत्तर सही होने की प्रायिकता $1/8$ है। दिया है कि उसका उत्तर सही है, वह प्रश्न का उत्तर जानता है, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(b) The trinomial distribution of two random variables X and Y is given by

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}$$

for $x, y = 0, 1, 2, \dots, n$ and $x+y \leq n$, where $0 \leq p, 0 \leq q$ and $p+q \leq 1$.

(i) Find marginal distributions of X and Y .

(ii) Find conditional distributions of X and Y .

15

दो यादृच्छिक चरों X और Y का त्रिपद बंटन है

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}$$

जहाँ $x, y = 0, 1, 2, \dots, n$ और $x+y \leq n$ साथ ही $0 \leq p, 0 \leq q$ और $p+q \leq 1$.

(i) X और Y के उपांत बंटन ज्ञात कीजिए।

(ii) X और Y के सप्रतिबंध बंटन ज्ञात कीजिए।

(c) Let X_1, X_2, \dots, X_n be independent identically distributed random variables with $E(X_i) = \mu$; $\text{var}(X_i) = \sigma^2$; ($0 < \sigma^2 < \infty$); $i = 1, 2, \dots, n$ and $E(X_i - \mu)^4 = \sigma^4 + 1$.

(i) If

$$P\left[\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - C\right] \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$, find C .

(ii) Find

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\sigma^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(X_1 - \mu)^2 + \dots + (X_n - \mu)^2}{n} \leq \sigma^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

[Given $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$]

25

माना X_1, X_2, \dots, X_n स्वतंत्र समान रूप से बंटित यादृच्छिक चर हैं, जिनमें $E(X_i) = \mu$; $\text{var}(X_i) = \sigma^2$; ($0 < \sigma^2 < \infty$); $i = 1, 2, \dots, n$ और $E(X_i - \mu)^4 = \sigma^4 + 1$.

(i) यदि

$$P\left[\frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2) - C\right] \rightarrow 0$$

जब $n \rightarrow \infty$, तो C ज्ञात कीजिए।

(ii) ज्ञात कीजिए

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\sigma^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(X_1 - \mu)^2 + \dots + (X_n - \mu)^2}{n} \leq \sigma^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

[दिया है $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$]

Or / अथवा

- (a) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from a three-point distribution; $P(X = Y_1) = \frac{1-\theta}{2}$, $P(X = Y_2) = \frac{1}{2}$, $P(X = Y_3) = \frac{\theta}{2}$, where $0 < \theta < 1$. Does the C-R inequality apply in this case? If so, find out the lower bound for the variance of an unbiased estimator of θ . 20

माना X_1, X_2, \dots, X_n तीन-बिंदु बंटन से लिया गया एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है; $P(X = Y_1) = \frac{1-\theta}{2}$, $P(X = Y_2) = \frac{1}{2}$, $P(X = Y_3) = \frac{\theta}{2}$, जहाँ $0 < \theta < 1$. क्या यहाँ C-R असमिका लागू होती है? यदि हाँ, तो θ के अनभिनत आकलक के विचरण का निम्न परिबंध ज्ञात कीजिए।

- (b) Let $X \sim N(0, \theta)$; $\theta > 0$. Find the maximum likelihood estimator of θ . Is it consistent? Is it asymptotically normal? Find the ML estimator of θ^2 . 20

माना $X \sim N(0, \theta)$; $\theta > 0$. θ का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए। क्या यह संगत है? क्या यह उपगामी प्रसामान्य है? θ^2 का अधिकतम संभावित आकलक ज्ञात कीजिए।

- (c) If X and Y are two independent standard normal variates, find the distribution of $\frac{X}{Y}$ and identify it. 10

यदि X और Y दो स्वतंत्र मानक प्रसामान्य चर हैं; तो $\frac{X}{Y}$ का बंटन ज्ञात कीजिए और इसे पहचानिए।

3. (a) Explain how the method of confidence interval is connected with the theory of testing of hypothesis. 10

वर्णन कीजिए कि विश्वास्यता अंतराल की विधि परिकल्पना के परीक्षण सिद्धांत से कैसे संबंधित है।

- (b) Describe sequential probability ratio test. Obtain the expressions for boundary points (A, B) in terms of strength (α, β) of the test where α and β are the probabilities of type I error and type II error respectively. 20

आनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण का विवरण दीजिए। परीक्षण की शक्ति (α, β) , जहाँ α और β क्रमशः प्रकार I त्रुटि और प्रकार II त्रुटि की संभावितताएँ हैं, के संदर्भ में सीमा बिंदुओं (A, B) के लिए अभिव्यक्ति प्राप्त कीजिए।

(c) In a trivariate distribution

$$r_{12} = 0.59, r_{13} = 0.46, r_{23} = 0.77$$

(i) comment on the consistency of above data;

(ii) if r_{23} is unknown, obtain the limits for r_{23} , given the above values of r_{12} and r_{13} .

20

एक त्रिचर बंटन

$$r_{12} = 0.59, r_{13} = 0.46, r_{23} = 0.77$$

(i) में उपरोक्त आँकड़ों की संगति पर टिप्पणी लिखिए;

(ii) में यदि r_{23} अज्ञात हो, तो ऊपर दिए गए r_{12} और r_{13} के मानों से r_{23} की सीमाएँ प्राप्त कीजिए।

Or / अथवा

(a) Let X_1, X_2, \dots, X_n be a random sample from discrete distribution with probability function $f(x)$ for which $x = 0, 1, 2, \dots$.

$$\text{According to } H_0 : f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{x!}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{According to } H_1 : f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{x+1}}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{otherwise} \end{cases}$$

Obtain the most powerful critical region of size α for testing H_0 against H_1 . Also find the power of the test in case $n = 1$ and constant $k = 1$.

20

माना X_1, X_2, \dots, X_n एक यादृच्छिक प्रतिदर्श असतत बंटन से लिया गया है, जिसका प्रायिकता फलन $f(x)$, जिसमें $x = 0, 1, 2, \dots$ है।

$$H_0 \text{ के अनुसार : } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-1}}{x!}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

$$H_1 \text{ के अनुसार : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{x+1}}; & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0; & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

H_0 का H_1 के विरुद्ध α आमाप का सर्वशक्तिमान क्रांतिक क्षेत्र प्राप्त कीजिए। $n = 1$ और अचर $k = 1$ के लिए परीक्षण की शक्ति ज्ञात कीजिए।

- (b) For the following data, test if both the samples were drawn from the same population using run test :

X : 12.7, 15.6, 9.1, 12.8, 8.3, 11.2, 9.4, 8.0, 14.9, 10.7, 13.6, 9.6

Y : 7.4, 7.3, 7.1, 9.0, 7.6, 9.5, 10.1, 10.2, 10.4, 9.5

[Given $Z(0.05) = 1.96$]

20

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए परम्परा परीक्षण द्वारा बताइए कि क्या दोनों प्रतिदर्श एक ही समष्टि से आते हैं :

X : 12.7, 15.6, 9.1, 12.8, 8.3, 11.2, 9.4, 8.0, 14.9, 10.7, 13.6, 9.6

Y : 7.4, 7.3, 7.1, 9.0, 7.6, 9.5, 10.1, 10.2, 10.4, 9.5

[दिया है $Z(0.05) = 1.96$]

- (c) For a simple linear regression model

$$y_i = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) + e_i; i = 1, 2, \dots, n$$

derive the least square estimates of α and β , clearly stating the conditions assumed. Also show that the two estimators are unbiased.

10

सरल रैखिक समाश्रयण मॉडल

$$y_i = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) + e_i; i = 1, 2, \dots, n$$

के लिए, माने गए प्रतिबंधों को स्पष्टतया लिखते हुए α और β के न्यूनतम वर्ग आकलक निकालिए। यह भी दर्शाइए कि दोनों आकलक अनभिनत हैं।

Section—II

खण्ड—II

4. Answer the following questions :

10×5=50

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

- (a) What do you mean by confounding in factorial experiment? Briefly describe total and partial confounding.

बहुउपादानी प्रयोग में संकरण से आप क्या समझते हैं? पूर्ण एवं आंशिक संकरण का संक्षेप में विवरण दीजिए।

- (b) Distinguish between process control and product control. Does process control also ensure product control necessarily?

प्रक्रिया नियंत्रण एवं उत्पाद नियंत्रण में अंतर स्पष्ट कीजिए। क्या प्रक्रिया नियंत्रण आवश्यक रूप से उत्पाद नियंत्रण भी सुनिश्चित करता है?

- (c) Define inventory. What are the advantages and disadvantages of having inventory?
तालिका को परिभाषित कीजिए। तालिका रखने के क्या लाभ एवं हानियाँ हैं?
- (d) Explain clearly (i) the chain base and (ii) the fixed base methods in constructing an index number. Which method is most frequently used and why?
सूचकांकों की रचना में (i) श्रृंखला आधार और (ii) स्थिर आधार विधियों को स्पष्ट रूप से समझाइए। कौन-सी विधि सबसे अधिक उपयोग की जाती है और क्यों?
- (e) What factors govern the growth of population? How do you find out whether the population of a country is increasing, decreasing or stationary?
जनसंख्या वृद्धि को कौन-से कारक नियंत्रित करते हैं? आप कैसे पता लगाएँगे कि देश की जनसंख्या बढ़ रही है, घट रही है या स्थिर है?
5. (a) What do you understand by a 'missing plot' in design of experiments?
Give an outline of the analysis of variance for a 4×4 Latin square design involving a single missing plot. 10+15=25
प्रायोगिक अभिकल्पना में 'अप्राप्त क्षेत्रक' से आप क्या समझते हैं?
एक 4×4 लैटिन वर्ग अभिकल्पना, जिसमें एक अप्राप्त क्षेत्रक है, के लिए प्रसरण विश्लेषण की रूपरेखा दीजिए।
- (b) Discuss the theoretical basis of p - and np -chart.
In a factory, approximately 200 units are produced per day. At the end of 20 working days, 230 units have been rejected out of 4150 units produced and inspected.
(i) Determine 3σ control limits for p -chart.
(ii) If only one point on the control chart falls outside the limits and on that day 30 units were found defective out of 200 units inspected, what control limits would you recommend for future? 10+15=25
 p - और np -संचित्र के सैद्धांतिक आधार की विवेचना कीजिए।
एक फैक्ट्री में प्रतिदिन लगभग 200 इकाइयों का उत्पादन होता है। 20 कार्य दिवसों के अंत में, उत्पादित और निरीक्षित 4150 इकाइयों में से 230 इकाइयाँ अस्वीकृत होती हैं।
(i) p -संचित्र के लिए 3σ नियंत्रण सीमाएँ ज्ञात कीजिए।
(ii) यदि नियंत्रण संचित्र में केवल एक बिंदु सीमाओं से बाहर होता है और उस दिन निरीक्षित 200 इकाइयों में से 30 इकाइयाँ त्रुटिपूर्ण पाई जाती हैं, तो भविष्य के लिए आप किन नियंत्रण सीमाओं की अनुशंसा करेंगे?

Or / अथवा

- (a) If the population consists of a linear trend, $y_i = i; i = 1, 2, \dots, k$, then prove that

$$\text{var}(\bar{y}_{st}) \leq \text{var}(\bar{y}_{sys}) \leq \text{var}(\bar{y}_n)_R \quad 25$$

यदि समष्टि रैखिक प्रवृत्ति, $y_i = i; i = 1, 2, \dots, k$, से युक्त हो, तो सिद्ध कीजिए

$$\text{var}(\bar{y}_{st}) \leq \text{var}(\bar{y}_{sys}) \leq \text{var}(\bar{y}_n)_R$$

- (b) What is meant by 'seasonal variations' in a time series?

Calculate the seasonal indices by link relative method for the data given below :

Quarter→ Year ↓	I	II	III	IV
2000	74	76	74	80
2001	82	68	50	62
2002	70	74	70	82

25

काल-श्रेणी में 'ऋतुनिष्ठ परिवर्तन' का क्या अर्थ है? नीचे दिए गए आँकड़ों के लिए लिंक-रिलेटिव विधि द्वारा ऋतुनिष्ठ सूचकांक ज्ञात कीजिए :

तिमाही→ वर्ष ↓	I	II	III	IV
2000	74	76	74	80
2001	82	68	50	62
2002	70	74	70	82

6. (a) What do you understand by acceptance sampling plans? Discuss the relative merits and demerits of single sampling plan and double sampling plan. 20

स्वीकरण प्रतिचयन आयोजनाओं से आप क्या समझते हैं? एकल प्रतिचयन आयोजना और द्विशः प्रतिचयन आयोजना के सापेक्ष गुण और दोषों की विवेचना कीजिए।

- (b) From the following table, find (i) missing population of city A, (ii) missing death rate of city B, and (iii) crude death rate of city B :

Given that : Crude death rate of city A = 10.88 and standardized death rate of city B = 13.58.

Age Group	City A		City B	
	Standard Population	Death rate per thousand	Local Population	Death rate per thousand
0-5	16000	11	5000	26
5-40	?	5	27000	6
40-75	120000	7	62000	?
75 and above	14000	65	6000	70
Total			100000	

20

निम्नलिखित सारणी से, (i) नगर A की अप्राप्त जनसंख्या, (ii) नगर B की अप्राप्त मृत्यु दर, और (iii) नगर B की अशोधित मृत्यु दर ज्ञात कीजिए :

दिया है : नगर A की अशोधित मृत्यु दर = 10.88 और नगर B की मानकीकृत मृत्यु दर = 13.58

आयु वर्ग	नगर A		नगर B	
	मानक जनसंख्या	मृत्यु दर प्रति हजार	स्थानीय जनसंख्या	मृत्यु दर प्रति हजार
0-5	16000	11	5000	26
5-40	?	5	27000	6
40-75	120000	7	62000	?
75 और अधिक	14000	65	6000	70
योग			100000	

- (c) Describe the problem of 'multicollinearity' in econometrics.

10

अर्थशास्त्र में 'बहुसंख्यता' की समस्या का वर्णन कीजिए।

Or / अथवा

- (a) In practice, which type of curve is exhibited by hazard rate? Discuss in detail the various regions of this curve. 15

व्यवहार में जोखिम दर द्वारा किस प्रकार का वक्र प्रदर्शित किया जाता है? इस वक्र के विभिन्न भागों की विस्तार से चर्चा कीजिए।

- (b) Five men are available to do five different jobs. From past records, the time (in hours) that each man takes to do the job is known and given in the following table :

		Job				
		I	II	III	IV	V
Man	A	2	9	2	7	1
	B	6	8	7	6	1
	C	4	6	5	3	1
	D	4	2	7	3	1
	E	5	3	9	5	1

Find the assignment of men to jobs that will minimize the total time taken. 20

पाँच व्यक्ति पाँच विभिन्न कार्यों के लिए उपलब्ध हैं। प्रत्येक व्यक्ति को कार्य करने में कितना समय (घंटों में) लगता है, इसका पिछला रिकार्ड ज्ञात है और वह निम्न सारणी में दिया गया है :

		कार्य				
		I	II	III	IV	V
व्यक्ति	A	2	9	2	7	1
	B	6	8	7	6	1
	C	4	6	5	3	1
	D	4	2	7	3	1
	E	5	3	9	5	1

कार्यों के लिए व्यक्तियों का नियोजन ज्ञात कीजिए जिससे लगने वाला कुल समय न्यूनतम हो जाए।

- (c) A test is given to 400 students. It gave mean 60 and standard deviation 12. Complete the following table :

Raw Score	84	78	72	66	60	54	48	42	36
σ -Score	—	—	1	—	0	—	—	—	—
Standard Score	—	—	—	50	—	40	—	—	—

15

400 छात्रों को एक परीक्षा दी जाती है। उसका माध्य 60 और मानक विचलन 12 है। निम्न सारणी को पूर्ण कीजिए :

रॉ स्कोर	84	78	72	66	60	54	48	42	36
σ -स्कोर	—	—	1	—	0	—	—	—	—
मानक स्कोर	—	—	—	50	—	40	—	—	—
