

2020

MATHEMATICS

गणित

PAPER—II

पत्र—II

Time Allowed : 1½ hours

Maximum Marks : 75

समय : 1½ घण्टे

पूर्णांक : 75

Instructions :

- The figures in the margin indicate full marks.
- Attempt **any five** questions.
- Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.
- All questions have been printed both in Hindi and English. In case of any ambiguity in Hindi version, the English version shall be considered authentic.
- Parts of the same question must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

अनुदेश:

- उपान्त के अंक पूर्णांक के द्योतक हैं।
- किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दें।
- परीक्षार्थी यथासम्भव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
- सभी प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों भाषा में छपे हैं। यदि हिन्दी भाषा में कोई संदेह है, तो अंग्रेजी भाषा को ही प्रामाणिक माना जाएगा।
- एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक-साथ ही लिखे जाएँ तथा उनके बीच में अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जाएँ।

1. (a) Prove that the intersection of two ideals of a ring is again an ideal of the ring. 6
- (b) Prove that the ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ of integers is a principal ideal domain. 9
- (क) सिद्ध कीजिये कि किसी वलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी उस वलय की गुणजावली होती है।
- (ख) सिद्ध कीजिये कि पूर्णाकों का वलय $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ एक मुख्य गुणजावली प्रान्त है।
2. (a) Prove that a constant function is R -integrable. 6
- (b) State and prove the fundamental theorem of integral calculus. 9
- (क) सिद्ध कीजिये कि स्थिर मान फलन R -समाकलनीय है।
- (ख) समाकलन गणित के मूल प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।
3. (a) If C is the square with vertices at $1 \pm i$, $-1 \pm i$, then verify Cauchy's theorem for the function $f(z) = 5 \sin 2z$, that is
- $$\int_C f(z) dz = 0 \quad 7$$
- (b) If C is the circle $|z|=1$, then find the value of integral
- $$\int_C \frac{\sin^6 z dz}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} \quad 8$$

(क) यदि C एक वर्ग है, जिसके कोने $1 \pm i$, $-1 \pm i$ हों, तब फलन $f(z) = 5 \sin 2z$ के लिये कोशी की प्रमेय का सत्यापन कीजिये, अर्थात्

$$\int_C f(z) dz = 0$$

(ख) यदि C वृत्त $|z|=1$ हो, तब समाकलन

$$\int_C \frac{\sin^6 z dz}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3}$$

का मान ज्ञात कीजिये।

4. If $a > 0$, then prove that

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx dx}{x(x^2 + a^2)} = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-am}) \quad 15$$

यदि $a > 0$, तब सिद्ध कीजिये कि

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx dx}{x(x^2 + a^2)} = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-am})$$

5. A diet is to contain at least 80 units of vitamin A and 100 units of minerals. Two foods F_1 and F_2 are available. Food F_1 costs ₹ 4 per unit and food F_2 costs ₹ 6 per unit. One unit of food F_1 contains 3 units of vitamin A and 4 units of minerals. One unit of food F_2 contains 6 units of vitamin A and 3 units of minerals. Formulate this as a linear programming problem. Find the minimum cost for diet that consists of mixture of these two foods and also meets the minimal nutritional requirements. 15

एक भोज्य पदार्थ में कम-से-कम 80 मात्रक विटामिन A और 100 मात्रक खनिज होना चाहिए। दो प्रकार के भोज्य F_1 और F_2 उपलब्ध हैं। भोज्य F_1 की लागत ₹ 4 प्रति मात्रक और भोज्य F_2 की लागत ₹ 6 प्रति मात्रक है। भोज्य F_1 की एक इकाई में 3 मात्रक विटामिन A और 4 मात्रक खनिज है। F_2 की प्रति इकाई में 6 मात्रक विटामिन A और 3 मात्रक खनिज है। इसे एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिये। उस आहार का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिये जिसमें इन दोनों भोज्यों का मिश्रण है और न्यूनतम पोषक तत्त्व भी है।

6. Solve the following partial differential equations :

(i) $(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$, where

$$D = \frac{\partial}{\partial x}; D' = \frac{\partial}{\partial y}$$

6

(ii) $r + 5s + 6t = 0$

9

निम्न आंशिक अवकल समीकरणों को हल कीजिये :

(i) $(D^2 + 3DD' + 2D'^2)z = x + y$, जहाँ

$$D = \frac{\partial}{\partial x}; D' = \frac{\partial}{\partial y}$$

(ii) $r + 5s + 6t = 0$

7. (a) Find the value of x at $y = 3.5$ using the given table :

6

x	20	25	30	35
y	3	4	5	6

(b) Solve $\frac{dy}{dx} = xy$ with $y(1) = 5$ using Euler's method in the interval $[1, 1.3]$ (where step size $h = 0.1$).

9

(क) $y = 3 \cdot 5$ पर x का मान दी गई सारणी का उपयोग कर ज्ञात कीजिये :

x	20	25	30	35
y	3	4	5	6

(ख) ऑयलर की विधि का उपयोग करते हुए अन्तराल $[1, 1.3]$ में निम्न को हल कीजिये :

$$\frac{dy}{dx} = xy, \text{ जब } y(1) = 5$$

(जहाँ पग आकार $h = 0.1$ हो।)

8. A rod of length $2a$ is suspended by a string of length l attached to one end. If the string and rod revolve about the vertical with uniform angular velocity and their inclinations to the vertical be θ and ϕ respectively, then show that

$$3 \frac{l}{a} = \frac{(4 \tan \theta - 3 \tan \phi) \sin \phi}{(\tan \phi - \tan \theta) \sin \theta} \quad 15$$

एक छड़ जिसकी लम्बाई $2a$ हो, लम्बाई l की डोरी के एक छोर द्वारा जोड़कर निलंबित की जाती है। अगर डोरी और छड़ एक-समान कोणीय वेग से ऊर्ध्वाधर तल में घूमती हैं एवं उनका ऊर्ध्वाधर तल से झुकाव क्रमशः θ एवं ϕ हो, तो दर्शाइए कि

$$3 \frac{l}{a} = \frac{(4 \tan \theta - 3 \tan \phi) \sin \phi}{(\tan \phi - \tan \theta) \sin \theta}$$
