

2020

## MATHEMATICS

गणित

PAPER—I

पत्र—I

Time Allowed : 1½ hours

Maximum Marks : 75

समय : 1½ घण्टे

पूर्णांक : 75

**Instructions :**

- The figures in the margin indicate full marks.
- Answer **any five** questions.
- Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.
- All questions have been printed both in Hindi and English. In case of any ambiguity in Hindi version, the English version shall be considered authentic.
- Parts of the same question must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

**अनुदेश :**

- उपान्त के अंक पूर्णांक के द्योतक हैं।
- किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दें।
- परीक्षार्थी यथासम्भव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
- सभी प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों भाषा में छपे हैं। यदि हिन्दी भाषा में कोई संदेह है, तो अंग्रेजी भाषा को ही प्रामाणिक माना जाएगा।
- एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक-साथ ही लिखे जाएँ तथा उनके बीच में अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जाएँ।

1. (a) For  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  show that

$$A^n = A^{n-2} + A^2 - I, \quad n \geq 3 \quad 8$$

यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ , तो सिद्ध करें कि

$$A^n = A^{n-2} + A^2 - I, \quad n \geq 3$$

(b) Find the maximal linearly independent subsystem of the system of vectors :

$$\vec{a}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{a}_2 = (1, 9, 3),$$

$$\vec{a}_3 = (-2, -4, 1), \quad \vec{a}_4 = (3, 7, -1) \quad 7$$

निम्न सदिश राशियों के समूह से उच्चतम संख्या का स्वतन्त्र सदिश उपसमूह प्राप्त करें :

$$\vec{a}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{a}_2 = (1, 9, 3),$$

$$\vec{a}_3 = (-2, -4, 1), \quad \vec{a}_4 = (3, 7, -1)$$

2. (a) Prove that between any two real roots of  $e^x \sin x = 1$ , there is at least one real root of  $e^x \cos x + 1 = 0$ . 8

सिद्ध करें कि समीकरण  $e^x \sin x = 1$  के किन्हीं दो वास्तविक हलों के मध्य एक वास्तविक हल समीकरण  $e^x \cos x + 1 = 0$  का अवश्य होगा।

(b)  $I = \int_0^{\pi/2} \log_e \sin x dx$ , find its value if exists. 7

$I = \int_0^{\pi/2} \log_e \sin x dx$  का मान ज्ञात करें, यदि है।

3. (a) Evaluate  $\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dx dy$ , by changing its order of integration. 8

समाकलन का क्रम बदल कर  $\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dx dy$  का मान ज्ञात करें।

(b) Find the centre of gravity of a solid right circular cone of height  $h$ . 7

एक ठोस लम्ब-वृत्तीय शंकु, जिसकी ऊँचाई  $h$  है, का गुरुत्व-केन्द्र ज्ञात करें।

4. (a) Find the shortest distance between

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+9}{-16} = \frac{z-10}{7} \text{ and}$$

$$\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5} \quad 8$$

निम्न रेखाओं के बीच की निम्नतम दूरी ज्ञात करें :

$$\frac{x-8}{3} = \frac{y+9}{-16} = \frac{z-10}{7};$$

$$\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$$

(b) In an ellipsoid

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

if  $r_1, r_2, r_3$  are the lengths of mutual perpendicular semidiameters then find

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2}$$

7

यदि  $r_1, r_2, r_3$  दीर्घवृत्तज

$$x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

के परस्पर लम्ब अर्धव्यासों की लम्बाई हों, तो

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} \text{ का मान ज्ञात करें।}$$

5. (a) Using method of variation of para-

meters solve  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \tan 2x$ .

8

प्राचल विचरण विधि द्वारा निम्न को हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \tan 2x$$

(b) Solve :

7

हल करें :

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + (2x^2-1)y = x^3$$

6. (a) Find the angle between surfaces  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  and  $z = x^2 + y^2 - 3$ , at  $(2, -1, 2)$ . 8

बिन्दु  $(2, -1, 2)$  पर बताएँ कि सतहें  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  और  $z = x^2 + y^2 - 3$  किस कोण पर मिलती हैं।

- (b) Verify Stokes' theorem for

$$\vec{F} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$$

where surface  $S$  is the upper half of the surface of sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  and  $C$  is its boundary. 7

$\vec{F} = (2x - y)\vec{i} - yz^2\vec{j} - y^2z\vec{k}$  के लिए स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित करें, जहाँ सतह  $S$  गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  का ऊपरी अर्द्ध-हिस्सा तथा  $C$  उसका घेरा हो।

7. (a) A point is moving in a straight line with simple harmonic motion (SHM) has velocities  $v_1$  and  $v_2$  when its distances from the centre are  $x_1$  and  $x_2$ . Show that period of motion is

$$2\pi\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)/(v_2^2 - v_1^2)} \quad 8$$

एक कण सरल रेखा में सरल आवर्त गति से चल रहा है, जिसकी गति केन्द्र से  $x_1$  तथा  $x_2$  दूरी पर क्रमशः  $v_1$  तथा  $v_2$  हैं। दर्शाएँ कि कण का परिक्रमण काल होगा

$$2\pi\sqrt{(x_1^2 - x_2^2)/(v_2^2 - v_1^2)}$$

- (b) A steamer with engines of 11200 HP can just be kept going at the rate 20 mph; find the resistance of water on the motion. 7

एक स्टीमर जिसके इंजन की पावर 11200 HP है, वह पानी में 20 मील प्रति घंटे की चाल से चल सकता है। पानी की गति पर प्रतिरोध ज्ञात करें।

8. (a) Find the curvature of the curve

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = at \cot a \quad 8$$

निम्न वक्र का टेढ़ापन (curvature) ज्ञात करें :

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = at \cot a$$

- (b) Show that  $\text{curl curl curl curl } \vec{F} = \nabla^4 \vec{F}$ , when  $\vec{F}$  is solenoidal. 7

सिद्ध करें कि  $\text{curl curl curl curl } \vec{F} = \nabla^4 \vec{F}$ , यदि  $\vec{F}$  सोलिनॉयडल है।

\*\*\*