ALL RIGHTS RESERVED
सर्वाधिकार सुरक्षित

49/FG/CC/M–2022–19

2022

MATHEMATICS

गणित

Time Allowed : 3 hours *Maximum Marks* : 300

समय : 3 घण्टे *पूर्णांक* : 300

Instructions :

- The figures in the margin indicate full marks.
- Answer **all** questions.
- Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.
- All questions have been printed both in English and Hindi. In case of any ambiguity in Hindi version, the English version shall be considered authentic.
- Parts of the same question must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

अनुदेश :

- उपांत के अंक पूर्णांक के द्योतक हैं।
- **सभी** प्रश्नों का उत्तर देना अनिवार्य है।
- परीक्षार्थी यथासम्भव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।
- सभी प्रश्न अंग्रेजी और हिन्दी दोनों भाषाओं में छपे हैं। यदि हिन्दी भाषा में कोई संदेह है, तो अंग्रेजी भाषा को ही प्रामाणिक माना जाएगा।
- एक ही प्रश्न के विभिन्न भागों के उत्तर अनिवार्य रूप से एक साथ ही लिखे जाएँ तथा उनके बीच में अन्य प्रश्नों के उत्तर न लिखे जाएँ।

SECTION—I

खण्ड—I

1. *(a)* Show that the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 3-4i & 2 \end{bmatrix}$$

is Hermitian. Find its eigenvalues and corresponding eigenvectors.

(b) Evaluate :

$$\lim_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

(c) Find the locus of the points from which three mutually perpendicular tangents can be drawn to the paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

(d) Show that div grad $r^m = m(m+1)r^{m-2}$.

12½×4=50

(क) दिखाइए कि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3+4i \\ 3-4i & 2 \end{bmatrix}$$

हर्मिटियन है। इसके अभिलाक्षणिक मान और अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए।

(ख) मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$$

(ग) उन बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जिनसे तीन परस्पर लम्बवत् स्पर्श-रेखाएँ परवलयज

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

पर खींची जा सकती हैं।

(घ) दिखाइए कि div grad $r^m = m(m+1)r^{m-2}$.

2. *(a)* Find the characteristic equation of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

and verify that it is satisfied by A.

(b) Evaluate the integral

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q \, dx$$

where p and q are positive integers.

25×2=50

(क) आब्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए कि यह A को संतुष्ट करता है।

(ख) समाकल

$$\int_a^b (x-a)^p (b-x)^q \, dx$$

का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ p और q धनात्मक पूर्णांक हैं।

OR / अथवा

(a) Solve the differential equation

$$(D^2 - 4D + 4)y = 8x^2 e^{2x} \sin 2x$$

where $D \equiv \dfrac{d}{dx}$.

(b) Trace the curve

$$x^2(x^2 - 4a^2) = y^2(x^2 - a^2)$$ 25×2=50

(क) अवकल समीकरण

$$(D^2 - 4D + 4)y = 8x^2 e^{2x} \sin 2x$$

को हल कीजिए, जहाँ $D \equiv \dfrac{d}{dx}$.

(ख) वक्र $x^2(x^2 - 4a^2) = y^2(x^2 - a^2)$ का अनुरेखण कीजिए।

3. (a) A uniform chain of length $2l$ has its ends attached to two points in the same horizontal line at a distance $2a$ apart. If l is only little greater than a, then show that the tension of the chain is approximately equal to the weight of a length

$$\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$$

of the chain and sag of the chain is nearly $\frac{1}{2}\sqrt{\{6a(l-a)\}}$.

(b) Find the centre of pressure of a triangular area immersed in a liquid with one side in the surface. 25×2=50

(क) लम्बाई $2l$ की एक समान जंजीर (chain) के सिरों को $2a$ की दूरी पर एक ही क्षैतिज रेखा में दो बिन्दुओं से जोड़ा जाता है। यदि l, a से केवल थोड़ा बड़ा है, तो दिखाइए कि जंजीर का तनाव लगभग जंजीर की लम्बाई

$$\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$$

के वजन के बराबर है और जंजीर की शिथिलता लगभग $\frac{1}{2}\sqrt{\{6a(l-a)\}}$ है।

(ख) सतह में एक तरफ के साथ एक तरल में डूबे त्रिकोणीय क्षेत्र के दबाव का केन्द्र ज्ञात कीजिए।

OR / अथवा

(a) A particle is projected with velocity V in a medium whose resistance varies as square of velocity. Find its motion.

(b) Prove that an anti-symmetric tensor A^{ij} has $\frac{n}{2}(n-1)$ independent components, where $i = 1, 2, 3, \cdots, n;\ j = 1, 2, 3, \cdots, n.$

25×2=50

(क) एक कण को वेग V के साथ एक ऐसे माध्यम में प्रक्षेपित किया जाता है, जिसका प्रतिरोध वेग के वर्ग के अनुसार बदलता है। इसकी गति ज्ञात कीजिए।

(ख) सिद्ध कीजिए कि एक प्रति-सममित टेन्सर A^{ij} में $\frac{n}{2}(n-1)$ स्वतंत्र घटक होते हैं, जहाँ $i = 1, 2, 3, \cdots, n;\ j = 1, 2, 3, \cdots, n.$

SECTION—II

खण्ड—II

4. (a) Show that the residue classes modulo 5, form a group with respect to addition of classes modulo 5.

(b) Find the complete integral of the equation $(p^2 + q^2)y = qz$, where $p = \frac{\partial}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial}{\partial y}$.

(c) Using Lagrange's equations, find the differential equation for a compound pendulum which oscillates in a vertical plane about a fixed horizontal axis.

(d) Find the first four moments of the following distribution about the mean, hence find the coefficient of skewness and kurtosis :

Marks	*No. of candidates*
0–10	1
10–20	6
20–30	10
30–40	15
40–50	11
50–60	7

12½×4=50

(क) दिखाइए कि अवशेष वर्ग मॉड्यूलो 5, मॉड्यूलो 5 समूह के संबंध में एक समूह बनाते हैं।

(ख) समीकरण $(p^2 + q^2)y = qz$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए, जहाँ $p = \frac{\partial}{\partial x}$ एवं $q = \frac{\partial}{\partial y}$.

(ग) एक संयुक्त (यौगिक) लोलक का अवकल समीकरण ज्ञात करने के लिए लैग्रेंज के समीकरणों का उपयोग कीजिए, जो एक ऊर्ध्वाधर सतह में एक निश्चित क्षैतिज रेखा में दोलन करता है।

(घ) माध्य के सापेक्ष निम्नलिखित बंटन के पहले चार आघूर्ण ज्ञात कीजिए, तत्पश्चात् विषमता और ककुदता का गुणांक ज्ञात कीजिए :

अंक	छात्रों की संख्या
0–10	1
10–20	6
20–30	10
30–40	15
40–50	11
50–60	7

5. *(a)* Let $\langle a_n \rangle$ be a Cauchy sequence in a metric space (X, d) and let $\langle b_n \rangle$ be any sequence in X such that

$$d(a_n, b_n) < \frac{1}{n} \ \forall \ n \in N$$

Show that $\langle b_n \rangle$ is a Cauchy sequence.

(b) Apply the method of calculus of residues to evaluate

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{5 - 4\cos} d\theta$$

25×2=50

(क) माना कि $\langle a_n \rangle$ एक मीट्रिक स्पेश (X, d) में एक कौसी अनुक्रम है और माना कि $\langle b_n \rangle$, X में कोई अनुक्रम हो जैसा कि $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}\ \forall\ n \in N$, दिखाइए कि $\langle b_n \rangle$ एक कौसी अनुक्रम है।

(ख) अवशेष-कलन की विधि लागू करते हुए

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos}\, d\theta$$

का मूल्यांकन कीजिए।

OR / अथवा

(a) Find the regression lines for the following data :

x	1	2	3	4	5
y	2	5	3	8	7

(b) A rod of length $2a$ is suspended by a string of length l attached to one end. If the string and rod revolve about the vertical with uniform angular velocity, and their inclination to the vertical be θ and ϕ respectively, then show that

$$\frac{3l}{a} = \frac{(4\tan\theta - 3\tan\phi)\sin\phi}{(\tan\phi - \tan\theta)\sin\theta}$$

25×2=50

(क) निम्नलिखित आँकड़े के लिए प्रतिगमन रेखाएँ प्राप्त कीजिए :

x	1	2	3	4	5
y	2	5	3	8	7

(ख) लम्बाई $2a$ की एक छड़ एक छोर से जुड़ी l लम्बाई की एक जंजीर द्वारा लटकाई जाती है। यदि जंजीर (string) और छड़ समान कोणीय वेग के साथ ऊर्ध्वाधर चक्कर लगाते हैं और उनका ऊर्ध्वाधर झुकाव क्रमशः θ और ϕ हो, तो दिखाइए कि

$$\frac{3l}{a} = \frac{(4\tan\theta - 3\tan\phi)\sin\phi}{(\tan\phi - \tan\theta)\sin\theta}$$

6. *(a)* Using Euler's method, find an approximate value of y corresponding to $x = 2$, given that $\frac{dy}{dx} = x + 2y$ and $y = 1$ when $x = 1$, taking step size $h = 0 \cdot 1$.

(b) Solve the following transportation problem by Vogel's approximation method :

	D	E	F	G	*Availability*
A	11	13	17	14	250
B	16	18	14	10	300
C	21	24	13	10	400
Requirement	200	225	275	250	

25×2=50

(क) यूलर की विधि का उपयोग करते हुए $x = 2$ पर y का अनुमानित मान ज्ञात कीजिए। दिया गया है कि $\frac{dy}{dx} = x + 2y$ और $y = 1$ जब $x = 1$, चरण (step) आकार $h = 0 \cdot 1$ है।

(ख) निम्नलिखित परिवहन समस्या को वोगल की सन्निकटन विधि द्वारा हल कीजिए :

	D	E	F	G	उपलब्धता
A	11	13	17	14	250
B	16	18	14	10	300
C	21	24	13	10	400
माँग	200	225	275	250	

OR / अथवा

(a) Reduce the following game by dominances and find the value of the game :

Player B

Player A	I	II	III	IV
I	3	2	4	0
II	3	4	2	4
III	4	2	4	0
IV	0	4	0	8

(b) Test for uniform convergence of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

25×2=50

(क) निम्नलिखित खेल को प्रभुत्व द्वारा कम कीजिए और खेल का मूल्य (value) ज्ञात कीजिए :

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A	I	II	III	IV
I	3	2	4	0
II	3	4	2	4
III	4	2	4	0
IV	0	4	0	8

(ख) शृंखला के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

★★★