69 FRO

20/FI–F/CC/M–2023–45 **Student's Copy**

Mathematics

Time : 3 Hours] [*Full Marks* : 300

Section—I

खण्ड—I

1. *(a)* Reduce the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

to the row reduced echelon form and also find its rank.

आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

को समानीत सोपानक रूप में समानीत करें एवं इसका रैंक भी निकालें।

(b) Determine the values of a, b and c so that the function

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(a+1)x + \sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ c & , \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x + bx^2} - \sqrt{x}}{bx^{3/2}} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

is continuous for all x.

a, b और c के मान निर्धारित करें ताकि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(a+1)x + \sin x}{x} & , \quad x < 0 \\ c & , \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x + bx^2} - \sqrt{x}}{bx^{3/2}} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

सभी x के लिए निरंतर हो।

(c) Find the volume of the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

दीर्घवृत्त का आयतन ज्ञात करें :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(d) If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and $\vec{a}$ is a constant vector, then prove the following identity :

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\vec{r}^{\,3}}(\vec{a}\times\vec{r})\right]=\frac{3}{\vec{r}^{\,5}}(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}$$

यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ और $\vec{a}$ एक अचर सदिश है, तो निम्नलिखित की पहचान सिद्ध करें :

$$\nabla\times\left[\frac{1}{\vec{r}^{\,3}}(\vec{a}\times\vec{r})\right]=\frac{3}{\vec{r}^{\,5}}(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}$$

12½×4=50

2. (a) Solve the following differential equation :

$$(3x^2y^3e^y+y^3+y^2)\,dx+(x^3y^3e^y-xy)\,dy=0$$

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल करें :

$$(3x^2y^3e^y+y^3+y^2)\,dx+(x^3y^3e^y-xy)\,dy=0$$

(b) Test the following function for relative maximum or minimum :

$$2\ln(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2),\ x+y+z>0$$

सापेक्ष अधिकतम और न्यूनतम के लिए निम्नलिखित फलन का परीक्षण करें :

$$2\ln(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2),\ x+y+z>0$$

25×2=50

***Or* / अथवा**

(a) Show that the following matrix is positive definite :

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 4 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

दर्शाएँ कि निम्नलिखित आव्यूह सकारात्मक निश्चित है :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Evaluate the following integral :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^4\theta \, d\theta$$

निम्नलिखित अभिन्न का मूल्यांकन करें :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^4\theta \, d\theta$$

25×2=50

3. *(a)* Verify Stokes' theorem for the vector field $\vec{V} = (3x - y)\hat{i} - 2yz^2\hat{j} - 2y^2z\hat{k}$, where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z > 0$.

निम्नलिखित वेक्टर क्षेत्र के लिए स्टोक्स के प्रमेय को सत्यापित करें :

$$\vec{V} = (3x - y)\hat{i} - 2yz^2\hat{j} - 2y^2z\hat{k}$$

जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z > 0$ की सतह है।

(b) Define contraction and inner product of tensors. Find the rank of inner product of tensors of A_r^p and B_{st}^q. Justify that the inner product of covariant and contravariant vectors is a scalar invariant.

टेंसर के संकुचन और आंतरिक उत्पाद को परिभाषित करें। A_r^p और B_{st}^q के टेंसर के आंतरिक उत्पाद का रैंक ज्ञात करें। औचित्य सिद्ध करें कि सहपरिवर्ती और प्रतिपरिवर्ती वेक्टर का आंतरिक उत्पाद एक अदिश अपरिवर्तनीय है। 25×2=50

Or / अथवा

(a) Derive the Frenet's formula.

फ्रेनेट सूत्र व्युत्पन्न करें।

(b) A rod 4 ft long rests on a rough floor against the smooth edge of a table of height 3 ft. If the rod is on the point of slipping when inclined at an angle 60° to the horizontal, find the coefficient of friction.

4 फुट लंबी एक छड़ 3 फुट ऊँची मेज़ के चिकने किनारे पर एक खुरदरे फर्श पर टिकी हुई है। यदि क्षैतिज से 60° के कोण पर झुकी हुई छड़ फिसलने के बिंदु पर है, तो घर्षण का गुणांक ज्ञात करें। 25×2=50

Section—II

खण्ड—II

4. *(a)* Find the singular solution of the following differential equation, if it exists :

$$6yz - 6pxy - 3qy^2 + pq = 0$$

where $p = \frac{\partial}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial}{\partial y}$.

निम्नलिखित अवकल समीकरण का विचित्र हल ज्ञात करें, यदि वह मौजूद है

$$6yz - 6pxy - 3qy^2 + pq = 0$$

जहाँ $p = \frac{\partial}{\partial x}$ और $q = \frac{\partial}{\partial y}$.

(b) Construct the Lagrangian and the equations of motion of a coplanar double pendulum placed in a uniform gravitational field.

एकसमान गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में रखे गए समतलीय दोहरे पेंडुलम के लैग्रेंजियन और गति के समीकरण का निर्माण करें।

(c) Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

समूह G की प्रत्येक समरूपी छवि, G के किसी भागफल समूह के समरूपी है।

(d) From the given data, obtain the two regression equations using the method of least squares :

x	:	2	4	6	8	10
y	:	5	7	9	8	11

दिए गए आँकड़ों से न्यूनतम वर्ग विधि का उपयोग करके दो समाश्रयण समीकरण प्राप्त करें :

x	:	2	4	6	8	10
y	:	5	7	9	8	11

12½×4=50

5. *(a)* Let X, Y be metric spaces and $f : X \to Y$ be a continuous function. If X is compact, then show that f is uniformly continuous.

मान लीजिए कि X, Y मेट्रिक स्पेस हैं और $f : X \to Y$ एक सतत फलन है। यदि X संहत है, तो दिखाएँ कि f एकसमान रूप से सतत है।

(b) Obtain the terms up to z^3 in the Taylor's series expansion of

$$f(z) = \frac{(z^2 + \sin^2 z)}{(1 - \cos z)}$$

about the point $z = 0$. Find the radius of convergence.

बिंदु $z = 0$ के बारे में,

$$f(z) = \frac{(z^2 + \sin^2 z)}{(1 - \cos z)}$$

के टेलर शृंखला विस्तार में z^3 तक के पद प्राप्त करें। अभिसरण की त्रिज्या ज्ञात करें।

25×2=50

Or /अथवा

(a) Calculate the coefficient of correlation between x and y for the following data :

x	:	65	66	67	67	68	69	70	72
y	:	67	68	65	68	72	72	69	71

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए x और y के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना करें :

x	:	65	66	67	67	68	69	70	72
y	:	67	68	65	68	72	72	69	71

(b) Show that the velocity potential

$$\phi = \frac{1}{2} \log \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

gives a possible motion. Determine the streamlines and show also that the curves of equal speed are the ovals of Cassini given by rr' = constant.

दिखाएँ कि वेग विभव एक संभावित गति

$$\phi = \frac{1}{2} \log \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}$$

देता है। स्ट्रीमलाइन निर्धारित करें और यह भी दिखाएँ कि समान गति के वक्र rr' = स्थिरांक द्वारा दिए गए कैसिनी के अंडाकार हैं।

25×2=50

6. (a) Using Newton-Raphson method, derive formulae to find $\frac{1}{N}$ and $N^{1/q}$, $N > 0$, q integer. Hence, find $\frac{1}{18}$ and $(18)^{1/3}$ correct up to four decimals. Use suitable initial approximation.

न्यूटन-रैफसन विधि का उपयोग करके $\frac{1}{N}$ और $N^{1/q}$, $N > 0$, q पूर्णांक, खोजने के लिए सूत्र प्राप्त करें। अतः $\frac{1}{18}$ और $(18)^{1/3}$ को चार दशमलव तक सही खोजें। उपयुक्त प्रारंभिक सन्निकटन का प्रयोग करें।

(b) We have five jobs, each of which must go through two machines A and B in the order AB. Processing times, in hours, are given in the table below :

Job (i)	:	1	2	3	4	5
Machine A	:	5	1	9	3	10
Machine B	:	2	6	7	8	4

Determine a sequence for five jobs that will minimize the time elapsed.

हमारे पास पाँच कार्य हैं, जिनमें से प्रत्येक को AB क्रम में दो मशीनों A और B से गुजरना होगा। प्रसंस्करण समय, घंटों में, नीचे दी गई तालिका में दिया गया है :

कार्य (i)	:	1	2	3	4	5
मशीन A	:	5	1	9	3	10
मशीन B	:	2	6	7	8	4

पाँच कार्यों के लिए अनुक्रम निर्धारित करें, जो व्यतीत होने वाले समय को कम करेगा।

25×2=50

Or / अथवा

(a) Use the Kuhn-Tucker condition to solve the following non-linear programming problem :

$$\text{Maximize} \quad Z = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

subject to

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

निम्नलिखित गैर-रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या को हल करने के लिए कुह्न-टकर शर्त का उपयोग करें :

$$\text{Maximize} \quad Z = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$$

subject to

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(b) Show that the sequence $\{f_n\}$, where

$$f_n = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

is uniformly convergent for all x.

दिखाएँ कि अनुक्रम $\{f_n\}$, जहाँ

$$f_n = \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

सभी x के लिए समान रूप से अभिसरण है। $25 \times 2 = 50$

★★★